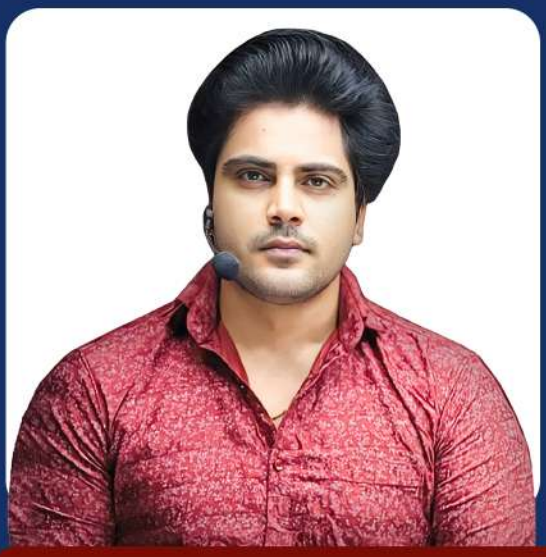
UPTET (SUPERTET) BEST NOTES

Visit Our
YouTube Channel

Download Our App

SACHIN CHOUDHARY



SACHIN CHOUDHARY

About the Author

In the realm of Education, there are rare individuals who not only impart knowledge but also ignite a flame of Ambition and Empowerment within their students. Sachin Choudhary sir stands tall among these luminaries, a Renowned and Experienced teacher.

He has qualified many Government Exams. Not only has he been a part of many government teaching training programs but also a guiding light for his students. Many of his students have cracked numerous Government Exams. A lot of his students are currently working in different Government Departments. As teaching is his passion, his aim has always been to provide quality education with the best content. He believes in hard work and honesty.

SACHIN ACADEMY

गणित

Maths

UPTET & SUPERTET BEST NOTES PAPER1 & 2 MATHS BY SACHIN ACADEMY

संख्या पद्धति (Number System)

परिभाषा (Definition)

संख्या और उनके गुणन का अध्ययन जिस पद्धति में किया जाता है, उसे **संख्या पद्धति** कहते हैं।

संख्याओं के प्रकार (Types of numbers)

प्राकृतिक संख्या (Natural Numbers, N)

- वस्तुओं को गिनने के लिए जो संख्या प्रयोग में आती हैं, उन्हें **प्राकृतिक संख्या** कहते हैं।
- **0 प्राकृतिक संख्या नहीं है।**
- **उदाहरण:** 1, 2, 3, 4, 5 … ∞
- **संकेतन:** N = {1,2,3,4,5,…}

पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers, W)

- यदि प्राकृतिक संख्या में 0 शामिल कर दें, तो इसे **पूर्ण संख्याएँ** कहते हैं।
- **उदाहरण:** 0, 1, 2, 3, 4 … ∞
- **नोट:**
  - सभी पूर्ण संख्याएँ धनात्मक पूर्णांक (Positive Integers), परिमेय (Rational) और वास्तविक (Real) होती हैं।
  - सभी प्राकृतिक संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ हैं, लेकिन सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृतिक संख्या नहीं हैं (जैसे 0)।

पूर्णांक संख्याएँ (Integers, Z)

- प्राकृतिक संख्या, शून्य और ऋणात्मक संख्याओं का समूह ही **पूर्णांक** कहलाता है।
- **उदाहरण:** … -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 …

❖ **संकेतन:** Z= {…,−4,−3,−2,−1,0,1,2,3,4,…}

सम और विषम संख्याएँ

❖ **सम संख्या (Even Numbers, E):** 2 से विभाजित होने वाली संख्याएँ।

➢ **उदाहरण:** 2, 4, 6, 8 …

❖ **विषम संख्या (Odd Numbers, O):** 2 से विभाजित न होने वाली संख्याएँ।

➢ **उदाहरण:** 1, 3, 5, 7 …

अभाज्य और भाज्य संख्याएँ

❖ **अभाज्य संख्या (Prime Numbers):** 1 और स्वयं को छोड़कर किसी अन्य संख्या से विभाजित न होने वाली प्राकृतिक संख्या।

➢ **उदाहरण:** 2, 3, 5, 7, 11 …

❖ **भाज्य संख्या (Composite Numbers):** 1 और स्वयं को छोड़कर किसी अन्य संख्या से विभाजित होने वाली संख्या।

➢ **उदाहरण:** 4, 6, 8, 9, 12 …

परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ

❖ **परिमेय संख्या (Rational Numbers, Q):** ऐसी संख्या जो pq\frac{p}{q}qp के रूप में लिखी जा सके, जहाँ p,qp, qp,q पूर्णांक हों और q≠0q \neq 0q=0।

➢ **उदाहरण:** 5/7, 8/9, 0, 7/9 …

❖ **अपरिमेय संख्या (Irrational Numbers):** परिमेय संख्याओं को छोड़कर बाकी सभी वास्तविक संख्याएँ।

➢ **उदाहरण:** √2, √3, -√2, -√3 …

वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers, R)

- **परिमेय और अपरिमेय संख्याओं** का समूह **वास्तविक संख्या** कहलाता है।
- **उदाहरण:** 2/3, 8/9, √2, √3, -√2, -√3 …

अत्रिभाज्य संख्याएँ (Prime Triplet Numbers)

- तीन ऐसी प्राकृतिक संख्याएँ जिनका **महत्तम समापवर्तक (H.C.F) = 1**, उन्हें अत्रिभाज्य संख्याएँ कहते हैं।
- **उदाहरण:** 8, 9, 25

क्रम (Order of Numbers)

- **आरोही क्रम (Ascending Order):-** जब दो या अधिक भिन्नों को बढ़ते क्रम में रखा जाता हैं तब भिन्नों के इस क्रम को आरोही क्रम कहते हैं। इस क्रम में सबसे छोटा भिन्न सबसे पहले तथा सबसे बड़ा भिन्न सबसे अंत में लिखा जाता हैं।
- **अवरोही क्रम (Descending Order):-** जब दो या अधिक भिन्नों को घटते क्रम में सजाया जाता हैं तब भिन्नों के इस क्रम को अवरोही क्रम कहते हैं। इस क्रम में सबसे बड़ा भिन्न सबसे पहले तथा सबसे छोटा भिन्न सबसे अंत में लिखा जाता हैं।

नोट्स (Important Notes)

- 1 न तो अभाज्य (Prime) है और न ही भाज्य (Composite)।
- 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है।
- 2 एकमात्र सम अभाज्य संख्या है।
- 3 सबसे छोटी विषम अभाज्य संख्या है।
- 4 सबसे छोटी भाज्य संख्या है।
- 9 सबसे छोटी विषम भाज्य संख्या है।
- 1-100 तक कुल अभाज्य संख्या: 25
- 1-50 तक कुल अभाज्य संख्या: 15
- 1-25 तक कुल अभाज्य संख्या: 9

➔ 25-50 तक कुल अभाज्य संख्या: 6

➔ 50-100 तक कुल अभाज्य संख्या: 10

भाजकता के नियम (Rules of Divisibility)

2 से भाजकता

- **नियम:** यदि किसी संख्या का **अंतिम अंक 0, 2, 4, 6 या 8** हो, तो वह संख्या 2 से भाज्य होती है।
- **उदाहरण:** 4350, 4258, 567084

3 से भाजकता

- **नियम:** यदि किसी संख्या के **अंकों का योगफल 3 से विभाजित हो**, तो वह संख्या 3 से भाज्य होती है।
- **उदाहरण:** 85761 → 8+5+7+6+1 = 27 → 27 ÷ 3 = 9 → संख्या 3 से भाज्य है।

4 से भाजकता

- **नियम:** यदि किसी संख्या के **अंतिम दो अंक (दहाई और इकाई)** 4 से विभाजित हों, तो संख्या 4 से भाज्य है।
- **उदाहरण:** 15396 → अंतिम दो अंक 96, 96 ÷ 4 = 24 → संख्या 4 से भाज्य है।

5 से भाजकता

- **नियम:** यदि किसी संख्या का **अंतिम अंक 0 या 5** हो, तो संख्या 5 से भाज्य है।

- **उदाहरण:** 85790, 12625

6 से भाजकता

- **नियम: यदि संख्या 2 और 3 दोनों से भाज्य हो, तो वह 6 से भी भाज्य होगी।**
- **उदाहरण:** 5730, 85944

7 से भाजकता

- **नियम: संख्या के अंतिम अंक को 2 से गुणा करके शेष संख्या से घटाएँ, यदि प्राप्त संख्या 7 से भाज्य हो तो मूल संख्या भी 7 से भाज्य है।**
- **उदाहरण:** 16807
  - 1680 - 7×2 = 1666
  - 166 - 6×2 = 154
  - 15 - 4×2 = 7 → संख्या 7 से भाज्य है।

8 से भाजकता

- **नियम: यदि किसी संख्या के अंतिम तीन अंक (सैकड़ा, दहाई और इकाई) 8 से विभाजित हों, तो संख्या 8 से भाज्य है।**
- **उदाहरण:** 73584 → अंतिम तीन अंक 584, 584 ÷ 8 = 73 → संख्या 8 से भाज्य है।

9 से भाजकता

- **नियम: यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाजित हो, तो संख्या 9 से भाज्य है।**
- **उदाहरण:** 47691 → 4+7+6+9+1 = 27 → 27 ÷ 9 = 3 → संख्या 9 से भाज्य है।

11 से भाजकता

- **नियम:** यदि किसी संख्या में **सम स्थानों के अंकों का योग और विषम स्थानों के अंकों का योग का अंतर 0 या 11 से विभाजित हो**, तो संख्या 11 से भाज्य है।

- **उदाहरण:** 95744

  - **सम स्थानों का योग = 9+7+4 = 20**
  - **विषम स्थानों का योग = 5+4 = 9**
  - अंतर = 20-9 = 11 → संख्या 11 से भाज्य है।

संख्याओ का भाग (Division of numbers)

(1) भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

(2) भाजक = $\frac{\text{भाज्य} - \text{शेषफल}}{\text{भागफल}}$

(3) भागफल = $\frac{\text{भाज्य} - \text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$

वास्तविक और स्थानीय मान (Face Value and Place Value)

स्थानीय मान (Place Value)

- किसी संख्या में किसी अंक का **स्थानीय मान** निकालने के लिए उस अंक के **स्थान के अनुसार उसका मान निर्धारित** किया जाता है।

- नियम: उस अंक के बाद जितने अंक बाकी हैं, उतने शून्य (0) लगा दें।

- **उदाहरण:** संख्या 38549 में

  - **5 का स्थानिक मान = 500**
  - **8 का स्थानिक मान = 8000**

➢ 3 का स्थानिक मान = 30000

वास्तविक मान (Face Value)

- किसी संख्या में किसी अंक का **वास्तविक मान** वह अंक स्वयं होता है, चाहे वह किसी भी स्थान पर हो।
- **उदाहरण:** संख्या 38549 में
  - ➢ 5 का वास्तविक मान = 5
  - ➢ 8 का वास्तविक मान = 8
  - ➢ 3 का वास्तविक मान = 3

लघुत्तम समापवर्त्य महत्तम समापवर्तक (H.C.F AND L.C.M)

H.C.F

- H.C. F उस बड़ी से बड़ी संख्या को कहते है जो किसी दी गई संख्या को पूरे तरीके से विभाजित (divided) कर दे
- 15, 20, 60 का H. C. F क्या होगा ?
- इसमें सबसे पहले छोटी वाली संख्या से उससे बड़ी वाली संख्या को भाग करेंगे फिर
- जो शेषफल (remainder) आया उस शेषफल से सबसे बड़ी वाली संख्या को भाग कर देंगे उसके बाद जो भागफल (quotient) आएगा वही H. C. F होगा

जैसे-

```
15 ) 20
     15
   ------
 5 ) 60 ( 12
     60
   ------
      0
```

15, 20, 60 का H.C.F = 5

L.C.M (Least Common Multiple)

परिभाषा:

- L.C.M वह **सबसे छोटी संख्या** होती है जो दी गई सभी संख्याओं से **पूरी तरह विभाजित (divisible)** हो जाए।
- इसमें सबसे बड़ी संख्या को दूसरी दी गई संख्याओं से विभाजित (divided) करेंगे अगर दी गई संख्याओं से सबसे बड़ी संख्या विभाजित हो गई तो वही संख्या L.C.M होगी अगर उनसे विभाजित नहीं हुई तो बड़ी वाली संख्या का पहाड़ा (table) पढ़ेंगे फिर उन दूसरी संख्याओं से विभाजित करेंगे अगर हो गई तो वही इन संख्याओं का L.C.M होगा अगर नहीं हुई तो फिर पहाड़ा ((table) पढ़ेंगे जब तक विभाजित न हो जाए ।

उदाहरण:

प्रश्न: 12, 15, 20 का L.C.M क्या होगा?

जैसे-

12, 15, 20 का L.C.M

20 × 3 = 60

12 × 5 = 60

15 × 4 = 60

तो,

12, 15, 20 का L.C.M = 60

इसका दूसरा तरीका ये है

3	12, 15, 60
4	4, 5, 20
5	1, 5, 5
	1, 1, 1

3 x 4 x 5 = 60

सार्व गुणक और गुणनखंड (Factors & Multiples)

सबसे छोटा सार्वगुणज (Smallest Common Multiple / L.C.M)

- किसी संख्याओं का L.C.M वह **सबसे छोटी संख्या** होती है जो दी गई सभी संख्याओं से पूरी तरह विभाजित हो।
- **उदाहरण:** 12 और 15 का L.C.M = 60

सबसे बड़ा सार्वगुणनखण्ड (Biggest Common Factor / H.C.F)

- किसी संख्याओं का H.C.F वह **सबसे बड़ी संख्या** होती है जो दी गई सभी संख्याओं को पूरी तरह विभाजित कर सके।
- **उदाहरण:** 12 और 15 का H.C.F = 3

गुणनखण्डों की संख्या (Number of Factors)

- किसी संख्या के **धनात्मक गुणनखण्डों (Positive Factors)** की संख्या निकालने के लिए **संख्या को इसके अभाज्य गुणकों में विभाजित** करें।
- नियम:
  - संख्या को prime factorization करें।
  - प्रत्येक अभाज्य गुणक की **power में 1 जोड़ें।**
  - सभी को आपस में **गुणा (multiply)** करें।
- **उदाहरण:** 105 के गुणनखण्डों की संख्या
  - 105 का prime factorization: $105 = 3^1 \times 5^1 \times 7^1$
  - हर power में 1 जोड़ें: (1+1) x (1+1) x (1+1)
  - गुणा करें: 2 x 2 x 2 = 8

➢ अत: 105 के **धनात्मक गुणनखण्डों की संख्या = 8**

धनात्मक गुणनखण्डों का योगफल (Sum of the Positive Factors)

परिभाषा:

- किसी संख्या के **सभी धनात्मक गुणनखण्डों का योगफल** निकालने के लिए prime factorization का उपयोग किया जाता है।

विधि (Step-wise Method):

1. संख्या को **prime factors में विभाजित** करें।
2. प्रत्येक prime factor की **power 0 से लेकर उसकी maximum power तक** जोड़ें।
3. सभी जोड़ को आपस में **गुणा (multiply)** करें।

उदाहरण:

प्रश्न: 210 का धनात्मक गुणनखण्डों का योगफल निकालिए।

1. **210 का prime factorization:**
    - $210 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$
2. formula:
    - Sum of factors = $(2^0 + 2^1) \times (3^0 + 3^1) \times (5^0 + 5^1) \times (7^0 + 7^1)$
3. **जोड़ को हल करें:**
    - $(1 + 2) \times (1 + 3) \times (1 + 5) \times (1 + 7)$
4. **गुणा करें:**
    - $3 \times 4 \times 6 \times 8 = 576$

5. अतः 210 का **धनात्मक गुणनखण्डों का योगफल = 576**

Note:

(1) दो संख्याओ का गुणनफल = LCM X HCF

(2) पहली संख्या = $\frac{LCM \times HCF}{\text{दूसरी संख्या}}$

(3) दूसरी संख्या = $\frac{LCM\ X\ HCF}{\text{पहली संख्या}}$

भिन्न (Fraction)

ऐसी संख्या, जिसे p के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ q ≠ 0, भिन्न कहलाती है। p को भिन्न का अंश तथा q को भिन्न का हर कहते हैं। जैसे 3/5 एक भिन्न है जिसमें 3 भिन्न का अंश तथा 5 भिन्न का हर है।

भिन्नो के प्रकार (Types of fractions)

1. साधारण भिन्न (Simple fraction)

- जब किसी संख्या का पूर्ण भाग किसी संख्या में नही जाता है तो उसे हम साधारण भिन्न कहते है। जैसे 4 में 5 से भाग दिया जाए तो इसका पूरा भाग नही जाता है। जैसे:- 4/5 एक साधारण भिन्न है।

2. संक्षिप्त भिन्न (Lowest term fraction)

- वे भिन्न, जिनके अंश व हर परस्पर अभाज्य हों अर्थात् दोनों में कोई और संख्या उभयनिष्ठ न हो,
- जैसे- $\frac{3}{4}, \frac{4}{11}$

3. उचित व अनुचित भिन्न (Proper and Improper Fraction)

- वे भिन्न जिनमें हर अंश से अधिक हों, उचित भिन्न कहलाती हैं।

- जैसे- $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}$
- वे भिन्न जिनमें अंश, हर से अधिक हों, अनुचित भिन्न कहलाती हैं।
- जैसे- $\frac{7}{4}, \frac{9}{4}$

4. मिश्र भिन्न (Mixed fraction)

- वे भिन्न, जो एक पूर्णांक तथा एक भिन्न से मिलकर बनती हैं, मिश्र भिन्न कहलाती हैं।
- जैसे- $3\frac{2}{3}, 7\frac{1}{6}$

5. व्युत्क्रम भिन्न (Inverse fraction)

- किसी भिन्न के अंश को हर तथा हर को अंश बनाकर प्राप्त भिन्न, पहले भिन्न का व्युत्क्रम भिन्न कहलाती है।
- जैसे- $\frac{5}{8}$ का व्युत्क्रम भिन्न $\frac{8}{5}$ है।

6. सतत् भिन्न (Continuous fraction)

- निम्न रूप से लिखी जाने वाले भिन्न सतत् भिन्न कहलाती है।
- जैसे- $2 + \frac{2}{4+\frac{1}{1+\frac{5}{6}}}$

7. संयुक्त भिन्न (Compound fraction)

वे भिन्न, जिनके अंश या हर या दोनों भिन्न होते हैं, संयुक्त भिन्न कहलाती हैं।

जैसे- $\frac{1}{7/9}, \frac{11/9}{13}$

दशमलव भिन्न (Decimal fraction)

यदि अंश (Numerator) में हर (Denominator) से भाग दिया जाए तो दशमलव में प्राप्त राशि दशमलव भिन्न कहलायेंगी।

जैसे- $\frac{2}{10}, \frac{3}{10}$

दशमलव भिन्नो के प्रकार (Types of decimal fractions)

1. पुनरावृत्त तशमलव भिन्न (Recurring Decimal fraction):

- वे दशमलव भिन्न, जिनमें दशमलव के बाद एक से अधिक अंकों की पुनरावृत्ति हो, पुनरावृत दशमलव भिन्न कहलाती है।
- ऐसी भिन्नों को प्रदर्शित करने के लिए पुनरावृत अंकों पर रेखा खींच देते हैं।
- जैसे- $\frac{2}{3} = 0.66666 \ldots \ldots = 0.6$, $\frac{22}{7} = 3.142857142857 = 3.14857$

2. शुद्ध पुनरावृत्त दशमलव भिन्न (Pure recurring decimal fraction)

- ऐसी पुनरावृत्त दशमलव भिन्न, जिनमें दशमलव बिन्दु के बाद के सभी अंकों की पुनरावृत्ति हो, शुद्ध पुनरावृत्त दशमलव भिन्न कहलाती है।
- इन भिन्नों को साधारण भिन्न में बदलने के लिए, दशमलव भिन्न को बिना दशमलव के अंश में लिखा जाता है। तथा हर में 9 उतनी ही बार लिखा जाता है जितनी बार अंको का दुहराव होता है।
- जैसे- 0.3 = $\frac{3}{9} = \frac{1}{9}$
- पुनरावृत्त अंकों की संख्या 1' है। अतः हर में 9 एक बार होगा।
- जैसे - 0.57 = $\frac{57}{99} = \frac{19}{33}$
- पुनरावृत्त अंकों की संख्या '1' है। अतः हर में 9 एक बार होगा।

3. मिश्रित पुनरावृत्त दशमलव भिन्न (Mixed recuring decimal fraction)

- ऐसी दशमलब भिन्न, जिनमें दशमलव बिन्दु के बाद कुछ अंकों की पुनरावृत्ति (Recurrence) होती है तथा कुछ की नहीं होती, मिश्रित पुनरावृत्त दशमलव भिन्न कहलाती हैं।
- जैसे - 0.19.3.223 आदि।

- इन्हें साधारण भिन्न में बदलने के लिए दशमलव बिन्दु के बाद के सभी अंकों की संख्या में से अपुनरावृत्त (unrepeated) भाग को घटाकर अंश के रूप में रख लेते हैं तथा हर में जितने पुनरावृत्त अंक हैं उतने ही बार 9 लेकर उसके बाद उतने ही शून्य लगाते हैं, जितने अपुनरावृत्त अंक हैं।
- जैसे- $0.27 = \frac{(27-2)}{90} = \frac{25}{90}$, $0.256 = \frac{(2956-29)}{9900} = \frac{2927}{9900}$

भिन्नो पर संक्रियाएँ (Operations - on fractions)

1. भिन्नों का योग (Addition on fractions)

(i) जब हर समान हों तो भिन्नों के अंशों का योग ज्ञात करके हर से भाग देते हैं।

जैसे- $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \{1 + 2 = 3\}$

(ii) जब हर समान ना हों तो LCM लेते है।

जैसे- $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4+9}{12} = \frac{13}{12}$

2. भिन्नों का अन्तर (Difference of fractions)

(i) जब हर (denominator) समान हों तो भिन्नों के अंशों (numerators) का अन्तर ज्ञात करके हर से भाग देते हैं

जैसे- $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \{4 - 2 = 2\}$

(ii) जब हर समान ना हों तो LCM लेते है।

जैसे- $\frac{5}{3} - \frac{2}{6} = \frac{10-2}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

3. भिन्नों का गुणा (Multiplication of fractions)

भिन्नों की गुणा करते समय भिन्नों के अंशों की गुणा तथा हरों की गुणा करते हैं। यदि भिन्न मिश्र रूप में हो, तो भिन्न को अनुचित भिन्न में परिवर्तित करके भिन्नों की गुणा ज्ञात करते हैं।

जैसे- $\frac{5}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

4. भिन्नों का भाग (Division of fractions)

जब एक भिन्न को किसी दूसरी भिन्न से भाग करते हैं, तब इसके लिए पहली भिन्न की गुणा दूसरी भिन्न के व्युत्क्रम (Inverse) से करते हैं। इस प्रकार, प्राप्त परिणाम की अभीष्ट भिन्न होती है।

जैसे- $\frac{4}{3}+\frac{5}{4}=\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{15}$

प्रतिशत (PERCENTAGE %)

1. किसी **साधारण भिन्न (Ordinary fraction)** को प्रतिशत में बदलने के लिए दिए गए भिन्न को 100 से गुणा करके प्राप्त amount में प्रतिशत का sign (%) लगा दिया जाता हैं।

उदाहरण: $\frac{1}{2}$ को प्रतिशत के रूप में लिखिए।

हल = $\frac{1}{2}\times 100\% = 50\%$

2. किसी प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिए उसे 100 से भाग दिया जाए हैं तथा प्रतिशत का संकेत % हटा दिया जाता हैं।

उदाहरण: 25 प्रतिशत को भिन्न के रूप में लिखिए।

हल: $25\% = \frac{25}{100}\frac{1}{4}$

3. प्रतिशत को **दशमलव भिन्न (Decimal fraction)** में बदलने के लिए प्रतिशत के संकेत को हटाकर प्रतिशत वाली संख्या को लिखकर दाहिनी ओर से दो अंको के बाद दशमलव संकेत (.) लगा दिया जाता हैं।

उदाहरण: 50% को दशमलव भिन्न में बदलिए ।

हल: $50\% = \frac{50}{100} = 0.50$

4. दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए सबसे पहले **दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न** में बदल दिया जाता हैं, साधरण भिन्न को 100 से गुणा करके प्राप्त राशि में प्रतिशत का sign (%) लगा दिया जाता हैं।

उदाहरण: 0.35 को प्रतिशत के रूप में लिखिए।

हल: 0.35 = $\frac{35}{100} = \left(\frac{35}{100} \times 100\right)\% = 35\%$

5. X Y% = $\frac{x \times y}{100}$

उदाहरण: 500 का 20% क्या होगा।

हल: $\frac{500 \times 20}{100}$ = 100 रुपये।

उदाहरण: 25, 50 का कितना प्रतिशत होगा।

हल: = $\frac{25 \times 100}{50} = 50\%$

लाभ और हानि (Profit and loss)

यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य (selling price) उसके क्रय मूल्य (cost price) से अधिक हो, तो उनके अंतर से प्राप्त धनराशि को लाभ (Profit) कहते हैं।

लाभ (P) = विक्रय मूल्य (S) - क्रय मूल्य (C)

यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उसके क्रय मूल्य से कम हो, तो उनके अंतर से प्राप्त धनराशि को हानि (Loss) कहते हैं।

हानि = क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य

लाभ और हानि के सूत्र (Profit and loss formulae)

- लाभ (P) = विक्रय मूल्य (Selling price) - क्रय मूल्य (Cost price)
- हानि (L) = क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य
- लाभ% (P%) = $\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$
- हानि % (L%) $\frac{\text{हानि} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$

साधारण ब्याज (Simple interest)

जब कोई व्यक्ति किसी व्यक्ति या महाजन या बैंक से कुछ धन उधार लेता हैं, तो यह उधार लिया गया धन मूलधन (Principal amount) कहलाता हैं।

जब ब्याज केवल मूलधन पर निश्चित समय के लिए एक ही दर पर लगाया जाता हैं, तब उसे साधारण ब्याज कहते हैं।

मूलधन और ब्याज के योग को **मिश्रधन (Compound money)** कहते हैं।

साधारण ब्याज के सूत्र (Formulae of Simple interest)

- साधारण ब्याज (Simple interest) $= \frac{\text{मूलधन}\,(P)\ X\ \text{दर}\,(R)\ x\ \text{समय}\,(T)}{100}$
- साधारण ब्याज = मिश्रधन (Compound money) - मूलधन (Principal amount)

भारतीय मुद्रा (Indian Currency)

वर्तमान में जो रुपया चलता है दरअसल यह कई सालों के बाद रुपया बना है सबसे पहले चलन में फूटी कौड़ी थी जो बाद में कौड़ी बनी इसके बाद;

A. कौड़ी से दमड़ी बनी

B. दमड़ी से धेला बना

C. धेला से पाई बनी

D. पाई से पैसा बना

E. पैसे से आना बना

F. आना से रुपया बना और अब क्रेडिट कार्ड और BITCOIN का जमाना आ गया है.

प्राचीन मुद्रा की एक्सचेंज वैल्यू इस प्रकार थी;

256 दमड़ी= 192 पाई=128 धेला = 64 पैसा = 16 आना = 1 रुपया

अन्य मुद्राओं की वैल्यू इस प्रकार है; (Exchange Value of Old Indian Currency)

(1) 3 फूटी कौड़ी (Footie Cowrie) = 1 कौड़ी

(2) 10 कौड़ी (Cowrie) = 1 दमड़ी

(3) 2 दमड़ी (Damri) = 1 धेला

(4) 1.5 पाई (Pai) = 1 धेला

(5) 3 पाई = 1 पैसा (पुराना) (6) 4 पैसा = 1 आना

(7) 16 आना (Anna) = 1 रुपया

(8) 1 रुपया = 100 पैसा

इस प्रकार ऊपर दिए गये पुराने समय की मुद्राओं की वैल्यू से स्पष्ट है कि प्राचीन समय में मुद्रा की सबसे छोटी इकाई फूटी कौड़ी थी जबकि आज के समय में यह इकाई पैसा है.

सरलीकरण (Simplification)

सरलीकरण के लिए महत्त्वपूर्ण नियम 'BODMAS' का प्रयोग किया जाता है।

B → Bracket (कोष्ठक)

0 → Of (का)

D → Division (भाग)

M → Multiplication (गुणा)

A → Addition (योग)

S → Subtraction (घटाव)

Bracket में सबसे पहले रेखा कोष्ठक ‾‾ फिर छोटा कोष्ठक) (फिर मझला कोष्ठक } { फिर बड़ा कोष्ठक] [को हल करते है। फिर भाग (÷), फिर गुणा (×) फिर योग (+) तथा अंत में घटाव (-) करते हैं

सरलीकरण में प्रयुक्त होने वाली महत्वपूर्ण सर्वसमिकाएँ

(Important Identities Used in Simplification)

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
- यदि $a + b + c = 0$, तो $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$

मापन प्रणाली (Measurement system)

लम्बाई मापने की इकाइयाँ (Units to Measure Lengths)

लम्बाई को मुख्यत: किलोमीटर, हेक्टोमीटर, डेकामीटर, मीटर, डेसीमी, समी तथा मिमी आदि भौतिक इकाइयों द्वारा मापा जाता है।

लम्बाई मापने की इकाइयाँ एवं उनमें सम्बन्ध

(Units of measuring length and their relationship)

1 मीटर = 1000 मिलीमीटर

1 मीटर = 100 सेंटीमीटर

1 मीटर = 10 डेसीमीटर

1 मीटर = $\frac{1}{10}$ डेकामीटर

10 डेकामीटर = 1 हेक्टोमीटर

10 हेक्टोमीटर = 1 किलोमीटर

1 किलोमीटर = 1000 मीटर

1 हेक्टोमीटर = 100 मीटर

1 इंच = 2.54 सेमी (लगभग)

1 फुट = 0.3048 मीटर

1 यार्ड = 0.9144 मीटर

1 मील = 1760 यार्ड = 1.6 किमी

धारिता मापने की इकाइयाँ (Units to Measure Capacity or Volume)

धारिता को मुख्यत: **लीटर, सेंटीलीटर, मिलीलीटर** आदि भौतिक इकाइयों द्वारा मापा जाता है।

धारिता मापने की राशियाँ एवं उनमें सम्बन्ध

(Units of measuring Capacity and their relationship)

1 लीटर = 1000 मिलीलीटर

1 लीटर = 100 सेंटीलीटर

1 लीटर = 10 डेसीलीटर

10 लीटर = 1 डेकालीटर

10 डेकालीटर = 1 हेक्टोलीटर

1 किलोलीटर = 1000 लीटर

1 सेंटीलीटर = $\frac{1}{100}$ लीटर

1 मिली लीटर = $\frac{1}{1000}$ लीटर

द्रव्यमान मापने की इकाइयाँ (Units to Measure mass)

द्रव्यमान को मुख्यतः टन, क्विंटल, किलोग्राम, ग्राम, मिलीग्राम आदि भौतिक इकाइयों द्वारा मापा जाता है।

द्रव्यमान को मापने की इकाइयाँ एवं उनमें सम्बन्ध (Units of measuring mass and their relationship)

1 टन = 10 क्विंटल = 1000 किलोग्राम

1 क्विंटल = 100 किलोग्राम

1 किलोग्राम = 10 हेक्टोग्राम

1 किलोग्राम = 1000 ग्राम

1 किलोग्राम = 10,000 डेसीग्राम

1 किलोग्राम = 10,0000 सेंटीग्राम

1 किलोग्राम = 10,00000 मिलीग्राम

1 औंस = 28.35 ग्राम

1 पाउण्ड = 454 ग्राम

समय मापने की इकाइयाँ (Units to Measure Time)

समय को मुख्यत: **घंटा, मिनट तथा सेकण्ड** आदि भौतिक इकाइयों द्वारा मापा जाता है।

समय मापने की इकाइयाँ तथा उनमें सम्बन (Units of measuring Time and their relationship)

1 सामान्य वर्ष = 365 दिन

366 दिन = 1 लीप वर्ष

1 वर्ष = 12 माह

1 दिन = 24 घंटे

1 घंटा = 60 मिनट

1 मिनट = 60 सेकण्ड

1 सेकण्ड = $\frac{1}{60}$ *मिनट*

तापमान (Temperature)

तापमान किसी वस्तु की **उष्णता की माप** है। अर्थात्, तापमान से यह पता चलता है कि कोई वस्तु ठंढी है या गर्म।

तापमान मापन का सूत्र (Temperature measurement formula)

$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} = \frac{K-273.15}{5}$$

0°F = -17.78°C

32°F = 0.00°c

0°C = 273.15K

जैसे: हमे 90°C को F में बदलना है तो

C=90

$$\frac{90}{5} = \frac{F-32}{9}$$

F = 18 × 9 + 32

F = 194°

समय, दूरी और चाल

(Time, distance and speed)

समय (Time)

- किसी व्यक्ति या यातायात के साधन द्वारा इकाई चाल से चली गई दूरी, उसके समय को निर्धारित करती हैं।
- **समय का सूत्र : समय (Time) =** $\frac{\text{दूरी (Distance)}}{\text{चाल (Speed)}}$

सापेक्ष चाल (Relative Speed)

- यदि दो वस्तुएं क्रमशः a किलोमीटर/घण्टा व b किलोमीटर/घण्टा की चाल से चल रही हैं, तब
- दोनों विपरीत दिशा में हो, तो सापेक्ष चाल = (a + b) किलोमीटर/घण्टा
- दोनों समान दिशा में हो, तो सापेक्ष चाल = (a - b) किलोमीटर / घण्टा

रेलगाड़ी और प्लेटफॉर्म (Train and Platform)

- जब कोई रेलगाड़ी किसी लम्बी वस्तु या स्थान (प्लेटफार्म / पुल / दूसरी रेलगाड़ी) को पार करती हैं, तो रेलगाड़ी को अपनी लम्बाई के साथ-साथ उस वस्तु की लम्बाई के बराबर अतिरिक्त दूरी भी तय करनी पड़ती हैं,
- **अर्थात कुल दूरी = रेल की लम्बाई + प्लेटफॉर्म या पुल की लम्बाई**

दूरी (Distance)

- किसी व्यक्ति या यातायात के साधन द्वारा स्थान परिवर्तन को तय की गई दूरी कहा जाता हैं।
- **दूरी का सूत्र : दूरी (Distance) = चाल (Speed) x समय (Time)**

चाल (Speed)

- किसी व्यक्ति/यातायात के साधन द्वारा इकाई समय में चली गई दूरी, चाल कहलाती हैं।
- **चाल का सूत्र : चाल (Speed) =** $\frac{\text{दूरी (Distance)}}{\text{समय (Time)}}$
- चाल का मात्रक (unit) मीटर / सेकंड अथवा किलोमीटर / घण्टा (km/hr) होता हैं।
- यदि चाल मीटर / सेकंड में हैं, तो किलोमीटर/घण्टा = 18/5 x मीटर / सेकंड
- यदि चाल किलोमीटर / घण्टा में हैं, तो मीटर / सेकंड = 5/18 x किलोमीटर/घण्टा

समय, दूरी और चाल (Time, Distance and Speed) - महत्वपूर्ण बिंदु

1. औसत चाल (Average Speed)

- औसत चाल = कुल चली गई दूरी ÷ कुल लगा समय
- यदि कोई वस्तु **एक ही दूरी** दो अलग-अलग चालों x और y से तय करती है, तो
  औसत चाल = (2 x x x y) ÷ (x + y) किलोमीटर/घंटा

2. सापेक्ष चाल (Relative Speed)

- **एक ही दिशा में:**
  यदि दो वस्तुएँ a और b किलोमीटर/घंटा की चाल से समान समय और स्थान से चल रही हैं, तो
  सापेक्ष चाल = a - b किलोमीटर/घंटा
- **विपरीत दिशा में:**
  यदि दो वस्तुएँ विपरीत दिशा में चल रही हैं, तो

सापेक्ष चाल = a + b किलोमीटर/घंटा

3. चाल और समय का अनुपात

- यदि दो व्यक्ति A और B **चालों के अनुपात a:b** से चलते हैं, तो **एक ही दूरी तय करने में लिया गया समय का अनुपात = b:a**

4. दूरी का निर्धारण (Distance Formula)

- यदि कोई व्यक्ति A से B तक x किलोमीटर/घंटा की चाल से चलता है और t1 समय **देर से पहुँचता है**, और y किलोमीटर/घंटा की चाल से चलता है तो t2 समय **जल्दी पहुँच जाता है**, तो A और B के बीच की दूरी:

दूरी = (X x Y x (t1 + t2)) ÷ (Y - X) किलोमीटर

- X और Y = चालें (km/h)
- t1 और t2 = समय का अंतर (घंटे)

क्षेत्रमिति (Mensuration)

क्षेत्रफल और परिमाप (Area and Perimeter)

1. क्षेत्रफल (Area)

- किसी आकृति का **उसके सभी भुजाओं से घिरे हुए तल** को क्षेत्रफल कहते हैं।

- **क्षेत्रफल की इकाइयाँ (Units):**
  - **वर्ग मीटर (Square meter)**
  - **वर्ग सेंटीमीटर (Square centimeters)**
  - **वर्ग किलोमीटर (Square kilometer) आदि**

2. परिमाप / परिमिति (Perimeter)

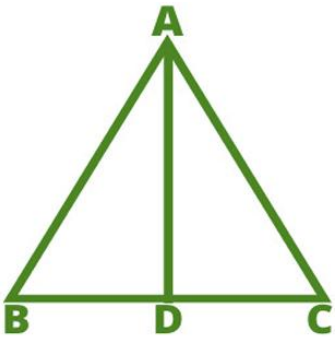
- किसी आकृति के **सभी भुजाओं की लंबाई का योग** परिमाप या परिमिति कहलाता है।
- परिमाप की इकाइयाँ: मीटर, सेंटीमीटर, किलोमीटर आदि

त्रिभुज (Triangle)

- **तीन भुजाओं से घिरा समतल क्षेत्र त्रिभुज कहलाता है।**
- त्रिभुज के लिए प्रतीक: "△"
- **किसी भी त्रिभुज में:**
  - **तीन भुजाएँ**
  - **तीन शीर्ष (Vertices)**
  - **तीन कोण (Angles) होते हैं**
- त्रिभुज के **तीनों कोणों का योग = 180°**

1. समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)

- जिस त्रिभुज की **तीनों भुजाएँ बराबर** हों, उसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं।
- समबाहु त्रिभुज के **प्रत्येक कोण का मान = 60°**
- **क्षेत्रफल:** (√3 / 4) × भुजा²
- **परिमाप:** 3 x भुजा
- **शीर्ष बिंदु से डाले गए लम्ब की लंबाई (Height):** (√3 / 2) × भुजा



2. समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) : जिस त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाई बराबर हों, उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।

- **समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल =** $\frac{b}{4}$ $(\sqrt{4a2} - b2)$
- **समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप = a+ a + c या 2a + b**

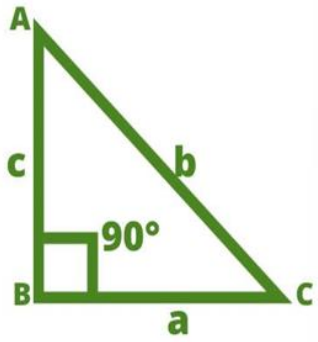
3. विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triangle) : जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएं असमान लम्बाई की हो, उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं।

- **विषमबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = ½ x आधार x ऊँचाई**
- **विषमबाहु त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं का योग = (a + b + c)/2**
- विषमबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = (√s(s - a) (s - b) (s - c)

4. समकोण त्रिभुज (Right Angle Triangle) : जिस त्रिभुज का एक कोण समकोण अर्थात 90° का हो, उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं।

- **यदि समकोण त्रिभुज में ABC के समकोण होने के साथ-साथ AB और BC की लम्बाईया भी बराबर हों, तो त्रिभुज ABC को समद्विबाहु समकोण त्रिभुज (Isosceles right angled triangle) कहते है।**
- **समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = ½ x आधार x ऊँचाई**
- **समकोण त्रिभुज का परिमाप (Perimeter of Right angle Triangle) = (लम्ब (perpendicular + आधार (base) + कर्ण (hypotenuse)) = (a + b + c)**
- **समकोण त्रिभुज का कर्ण =** $\sqrt{(\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2)}$
- समकोण त्रिभुज का लम्ब = $\sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{आधार}^2}$

❖ समकोण त्रिभुज का आधार = √ कर्ण^2 - **लम्ब**^{2}



समकोण त्रिभुज की भुजाएँ (Right-Angled Triangle Sides)

क्रमांक	लम्ब (Perpendicular)	आधार (Base)	कर्ण (Hypotenuse)
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	8	15	17
5	9	40	41
6	11	60	61

5. समकोण (Right Angle) : जिस कोण की एक भुजा का मान 90° हो वो समकोण कहलाता हैं।

6. न्यूनकोण त्रिभुज (Acute Angled Triangle) : जिस त्रिभुज के तीनों कोण न्यून कोण अर्थात 90° से कम हो, उसे न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं।

7. अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse-angled triangle) : जिस त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण अर्थात 90° से अधिक हो, उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं त्रिभुज ABC में ‹ABC की माप 90° से अधिक हैं।

8. पुनयुक्त कोण (Reflex Angle) : जो कोण दो समकोण से बड़ा किन्तु चार समकोण से छोटा होता हैं उसे पुनयुक्त कोण कहते हैं।

9. ऋजुकोण (Straight Angle) : जिस कोण की माप 180° के बराबर हैं उसे ऋजुकोण कहते हैं।

10. कोटीपुरक कोण (Complementary): यदि दो कोणों की मापों का जोड़ 90° हो तो वे परस्पर पूरक या कोटीपुरक कहलाते हैं।

11. सम्पूरक कोण (Supplementary) : यदि दो कणों की मापों का जोड़ 180° हो तो वे परस्पर सम्पूरक कोण कहलाते हैं।

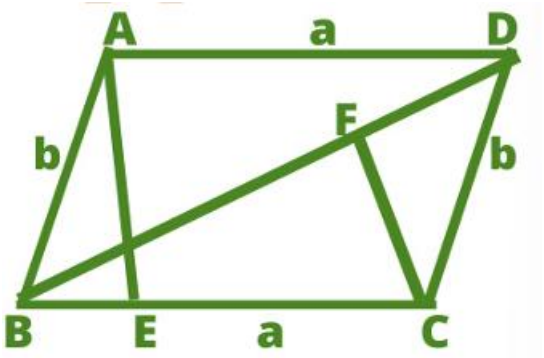
चतुर्भुज (QUADRILATERAL)

चार भुजाओं से घिरे समतल क्षेत्र को चतुर्भुज कहते हैं किसी भी चतुर्भुज में चार भुजाएँ तथा चार कोण होते हैं चतुर्भुज के चारों कोणों का योगदान चार समकोण 360° का होता हैं।

1. समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram) : चार भुजाओं से घिरी वह आकृति, जिसके आमने-सामने की भुजाएँ बराबर और समान्तर हों, समान्तर चतुर्भुज कहलाती हैं इसमें सम्मुख कोण (Opposite angle) भी बराबर होते हैं।

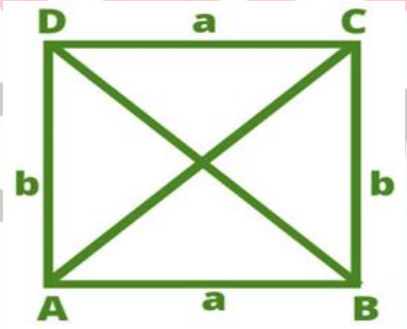
ABCD एक समान्तर चतुर्भुज हैं जिसमें भुजा AB, CD के और AD, BC के समांतर तथा बराबर हैं BD समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण (Diagonal) तथा AE इसकी ऊँचाई हैं।

यदि समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ a, b हो और A से BC पर डाले गए लम्ब AE की लम्बाई h हो, तो



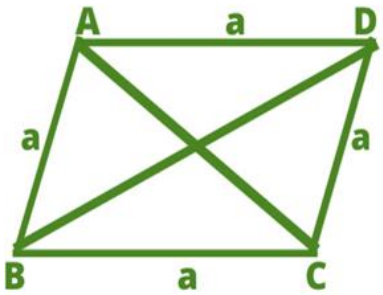
- समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (area) = आधार x ऊँचाई
- समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = कर्ण x आमने सामने के शीर्ष से कर्ण की लम्बाई दूरी = BD x CF
- समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 2 x त्रिभुज ABD या BCD का क्षेत्रफल
- समान्तर चतुर्भुज का परिमाप (Perimeter) = भुजाओं का योगदान
- 2 x (a + b)

2. आयत (Rectangle) : चार भुजाओं से घिरी वह आकृति, जिसमें आमने सामने की भुजाएँ समान्तर और बराबर होती हैं तथा प्रत्येक कोण समकोण होता हैं, उसे आयत कहते हैं।



- AC तथा BD को विकर्ण कहते हैं तथा ये आपस में बराबर होते हैं अर्थात AC =BD
- आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)
- आयत का क्षेत्रफल = लंबाई x चौड़ाई
- आयत का विकर्ण = (लंबाई 2 + चौड़ाई 2)

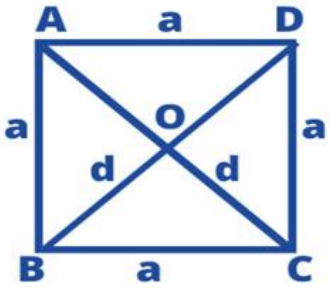
3. विषमकोण समचतुर्भुज (Rhombus) : चार भुजाओं से घिरी वह आकृति, जिसमें चारों भुजाएं बराबर हों, लेकिन एक भी कोण समकोण न हो, उसे विषमकोण समचतुर्भुज या समचतुर्भुज कहते हैं।



- **विषमकोण चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ½ x दोनों विकर्णों का गुणनफल**
- **विषम कोण समचतुर्भुज की परिमाप = 4 x एक भुजा**

4. वर्ग (square) : चार भुजाओं से घिरी वह आकृति जिसकी चारो भुजाएँ बराबर हों तथा प्रत्येक कोण समकोण अर्थात 90° का हो, उसे वर्ग कहते हैं।

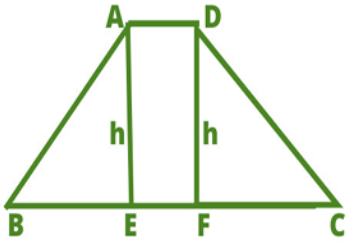
AC तथा BD को विकर्ण कहते हैं तथा ये आपस में एक दूसरे के बराबर होते हैं अर्थात AC = BD



- **वर्ग का क्षेत्रफल = (एक भुजा)** ^{2} = a^2
- **वर्ग की परिमिति = 4 x a**
- वर्ग का विकर्ण = एक भुजा x √2 = a x √2

5. समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium) : चार भुजाओं से घिरी वह आकृति, जिसकी केवल दो भुजाएँ समान्तर (Parallel) हों, उसे समलम्ब चतुर्भुज कहते हैं।

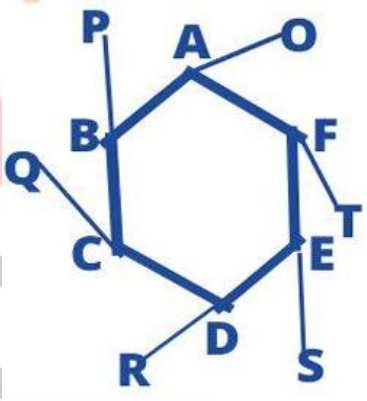
ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज हैं, जिसमें सिर्फ AD तथा BC समान्तर भुजाएँ (Sides) हैं AB और CD आड़ी (oblique) भुजाएँ हैं A से AE या D से DF लम्ब BC पर खींचा जाए तो AE या DF इसकी ऊँचाई होगी।



- समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ½ x ऊँचाई × समान्तर भुजाओं का योग
- समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ½ x h x (AD + BC)

बहुभुज (POLYGON)

बहुभुज का क्षेत्रफल उसको कई त्रिभुजों (Triangles) या चतुर्भुजों (Quadrilaterals) या अन्य मानक आकृतियों में बांटकर निकाला जाता हैं यदि बहुभुज में पाँच, छ: या दस भुजाएँ हों, तो उसको क्रमश: पंचभुज, छट्भुज, दसभुज कहाँ जाता हैं।

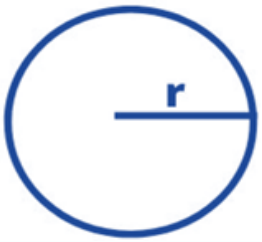


- n भुजा वाले चतुर्भुज का अन्त: कोणों का योग = 2(n-2) × 90^0
- n भुजा वाले बहुभुज के बहिष्कोणों का योग = 360°
- n भुजा वाले समबहुभुज (Equilateral) का प्रत्येक अन्त: कोण = $\frac{2(n-2)\times 90^\circ}{n}$

व्रत (CIRCLE)

केंद्र से गुजरने वाली वह शीधी रेखा जो व्रत को दो बराबर खंडों में विभक्त करती हैं व्रत का व्यास (Diameter) कहलाती हैं, व्रत का व्यास उसकी त्रिज्या (radius) का दोगुना होता हैं।

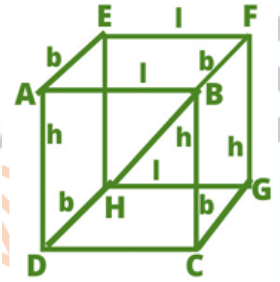
परिधि (circumference) पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाली सीधी रेखा को व्रत की जीवा या चाप कर्ण (Chord or arc hypotenuse) कहते हैं।



- व्रत का व्यास (diameter of circle) = 2 x त्रिज्या = 2r
- व्रत की परिधि (circumference of circle) = 2π त्रिज्या = 2 πr
- व्रत की परिधि = n x व्यास = πd
- व्रत का क्षेत्रफल (circumference of circle) = π x त्रिज्या^{2} = πr^2

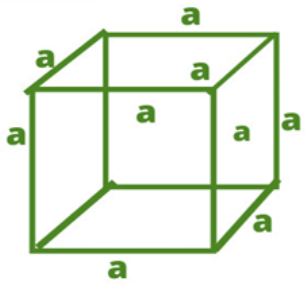
घनाभ (CUBOID)

छः पृष्ठों से घिरी वह आकृति, जिसमें प्रत्येक पृष्ठ एक आयत होता हैं और सम्मुख पृष्ठ बराबर होते हैं घनाभ कहलाती हैं।



- घनाभ का आयतन (volume of cuboid) = लम्बाई = चौड़ाई x ऊँचाई
- घनाभ का आयतन = l x b x h
- घनाभ के समस्त पृष्ठों का क्षेत्रफल = 2 (लम्बाई x चौड़ाई + चौड़ाई + ऊँचाई x लम्बाई)
- घनाभ के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = 2(lb + bh + hl)
- घनाभ के विकर्ण (Diagonal of cuboid) $\sqrt{}$(लम्बाई)^2 + (चौड़ाई)^2 + (ऊंचाई)^2
- घनाभ का विकर्ण (Diagonal of cuboid) = $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$

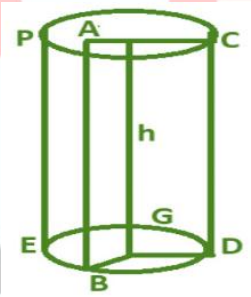
घन (Cube)



- **घन का आयतन (Volume of the cube) = a × a × a**
- **घन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $6a^2$ वर्ग सेंटीमीटर।**
- घन का विकर्ण = a √3 सेंटीमीटर।

बेलन (Cylinder)

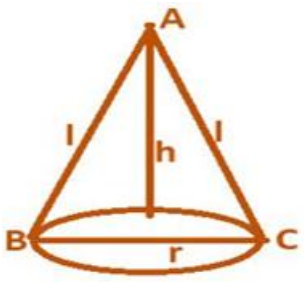
बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$



- **बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल (Area of curved surface of cylinder)= $2\pi rh$**
- **बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल (Total surface area of cylinder) = ($2\pi rh + 2\pi r^2$) वर्ग सेंटीमीटर।**
- **खोखले बेलन का आयतन (volume of hollow cylinder) = $\pi h(r^21 - r^22)$**
- **खोखले बेलन का वक्र पृष्ठ (curved surface of hollow sylinder) = $2\pi h(r^21 + r^22)$**
- **खोखले बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ (Total surface of hollow sylinder) = $2\pi h(r^1 + r^2) + 2\pi (r^21 - r^22)$**

शंकु (Cone)

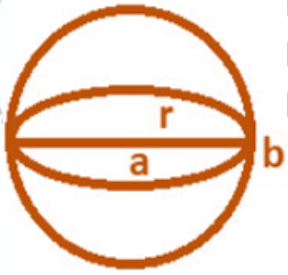
$L = \sqrt{(r^2 + h^2)}$



- **शंकु का आयतन (volume of cone) = $\frac{1}{3}(\pi r^2 h)$**
- **शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल (Area of curved surface of cone) = πrl वर्ग सेंटीमीटर**
- **शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल (Total surface of cone) = $(\pi rl + \pi r^2)$ वर्ग सेंटीमीटर (Square centimeters) l**

गोला (Sphere)

गोला वह ठोस है जिसमें केवल एक तल (base) होता है और इसके तल का प्रत्येक बिन्दु एक निश्चित बिन्दु से समान दूरी पर होता है। इस बिन्दु को गोले का केन्द्र कहते हैं तथा केन्द्र से गोले के किसी बिन्दु की दूरी को गोले की त्रिज्या (radius) कहते हैं।



- **गोला का आयतन (Volume of sphere) = $\frac{4}{3}\pi r^3$ घन सेंटीमीटर**
- **गोले का वक्र पृष्ठ (curved surface of sphere) = 4 πr^2 वर्ग सेंटीमीटर**
- **अर्द्धगोले का आयतन (Volume of hemisphere) = $\frac{2}{3}\pi r^3$ घन सेंटीमीटर**
- **अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठ (curved surface of hemisphere) = $3\pi r^2$ वर्ग**
- **अद्वगोले का वर्कप्रष्ठ (curved surface of hemisphere) = $2\pi r^2$**

केंद्रीय प्रवृत्ति के माप (Measures of Central Tendency) :

सांख्यिकी (statistics) में, केंद्रीय प्रवृत्ति के माप वह एकल मान (single value) होते हैं जो डेटा सेट के केंद्र (center) का प्रतिनिधित्व करते हैं। ये मान हमें यह समझने में मदद करते हैं कि डेटा कहाँ केंद्रित है। मुख्य रूप से चार प्रकार के माप होते हैं: माध्य (Mean), माध्यिका (Median), बहुलक (Mode), और परास (Range)।

1. माध्य (Mean) :

माध्य सबसे सामान्य केंद्रीय प्रवृत्ति का माप है। यह डेटा सेट के सभी मानों का औसत (average) होता है। इसे सभी अवलोकनों (observations) को जोड़कर उनकी कुल संख्या से भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

- **अवर्गीकृत डेटा (Ungrouped Data) के लिए:** इसे अंकगणितीय माध्य (Arithmetic Mean) भी कहते हैं। माध्य ($\underline{X}$) = $\frac{\text{अवलोकनों का योग}}{\text{अवलोकनों की संख्या}}$
- **वर्गीकृत डेटा (Grouped Data) के लिए:** माध्य ($\underline{X}$) = $\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

  जहाँ, f_i = वर्ग की आवृत्ति (frequency of the class)

  x_i = वर्ग का मध्य-मान (mid-value of the class)

2. माध्यिका (Median) :

माध्यिका वह मान है जो सटीक रूप से डेटा सेट के बीच में होता है, जब डेटा को आरोही (ascending) या अवरोही (descending) क्रम में व्यवस्थित किया जाता है। यह डेटा को दो बराबर हिस्सों में बांटता है।

- **अवर्गीकृत डेटा (Ungrouped Data) के लिए:** सबसे पहले, डेटा को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें।
  - यदि अवलोकनों की संख्या (n) विषम (odd) हो, तो माध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वां पद होती है।
  - यदि अवलोकनों की संख्या (n) सम (even) हो, तो माध्यिका $\frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वां पद}+\left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वां पद}}{2}$ होती है।
- **वर्गीकृत डेटा (Grouped Data) के लिए:** माध्यिका = $l + \frac{\left(\frac{n}{2}-C\right)}{f} \times i$

  जहाँ, l = माध्यिका वर्ग (median group) की निचली सीमा (lower limit)

  n = आवृत्तियों का योग (sum of frequencies)

  f = माध्यिका वर्ग की आवृत्ति (frequency of the median group)

  C = माध्यिका वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति (cumulative frequency of the class preceding the median group)

  i = वर्ग अंतराल का अंतर (difference of the class interval)

3. बहुलक (Mode) : बहुलक वह मान है जो डेटा सेट में सबसे अधिक बारंबारता (frequency) के साथ आता है। यह दर्शाता है कि कौन सा अवलोकन सबसे आम है।

- **वर्गीकृत डेटा (Grouped Data) के लिए:** बहुलक = $l + \frac{(f_1 - f_0)}{(2f_1 - f_0 - f_2)} \times i$

  जहाँ, l = बहुलक वर्ग (mode group) की निचली सीमा (lower limit)

  f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति (frequency of the mode group)

  f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की आवृत्ति (frequency of the class preceding the mode group)

  f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग की आवृत्ति (frequency of the class succeeding the mode group)

  i = वर्ग अंतराल का अंतर (difference of the class interval)

4. परास (Range) :

परास डेटा सेट के **फैलाव (spread)** को मापने का सबसे सरल तरीका है। यह उच्चतम (highest) और निम्नतम (lowest) अवलोकन के बीच का अंतर होता है।

परास = उच्चतम अवलोकन - निम्नतम अवलोकन

माध्य, माध्यिका और बहुलक के बीच संबंध :

आमतौर पर, माध्य, माध्यिका और बहुलक के बीच एक प्रायोगिक (empirical) संबंध होता है, जिसे **पियर्सन का संबंध** भी कहा जाता है:

बहुलक = $3 \times$ माध्यिका $- 2 \times$माध्य

यह सूत्र तब काम आता है जब डेटा सेट थोड़ा असममित (asymmetrical) हो।

कैलेंडर (Calendar)

परिभाषा:

कैलेंडर दिन, सप्ताह, महीना और वर्ष के बीच पारस्परिक सम्बन्धों को प्रदर्शित करने का एक साधन है।

कैलेंडर के महत्वपूर्ण बिंदु (Important Points)

1. लीप वर्ष (Leap Year)

- यदि कोई वर्ष 4 से पूरी तरह विभाजित हो, तो वह वर्ष **लीप वर्ष** कहलाता है।
  - 1 लीप वर्ष = 366 दिन
- यदि कोई शताब्दी वर्ष 400 से पूरी तरह विभाजित हो, तो वह वर्ष **शताब्दी लीप वर्ष** होता है।

2. विषम दिन (Odd Days)

- किसी दिन की संख्या को 7 से भाग देने पर शेष बचा दिन **विषम दिन** कहलाता है।
- सप्ताह के दिनों के लिए विषम दिन:
  - रविवार = 0
  - सोमवार = 1

- मंगलवार = 2
- बुधवार = 3
- गुरुवार = 4
- शुक्रवार = 5
- शनिवार = 6

3. महीने और अतिरिक्त दिन

- एक वर्ष में 12 महीने होते हैं। प्रत्येक महीने में अतिरिक्त दिन (Days ÷ 7 का शेष) निम्नलिखित है:

महीना	दिन	अतिरिक्त दिन
जनवरी	31	3
फरवरी	28/29	0 / 1
मार्च	31	3
अप्रैल	30	2
मई	31	3
जून	30	2

जुलाई	31	3
अगस्त	31	3
सितम्बर	30	2
अक्टूबर	31	3
नवम्बर	30	2
दिसम्बर	31	3

4. वर्ष के सप्ताह और दिन

- साधारण वर्ष में 52 सप्ताह + 1 दिन होता है।
- लीप वर्ष में 52 सप्ताह + 2 दिन होते हैं।
- किसी दिन की पुनरावृत्ति 7, 14, 21, 28, ... 364 दिनों के बाद होती है।

5. शताब्दी वर्ष

- किसी शताब्दी का प्रथम दिन सोमवार, मंगलवार, गुरुवार, शुक्रवार या शनिवार हो सकता है।
- शताब्दी का अंतिम दिन बुधवार, शुक्रवार या रविवार हो सकता है।

6. समान प्रथम दिन वाले माह

- साधारण वर्ष में:

- ➢ **जनवरी = अक्टूबर**
- ➢ **फरवरी = मार्च = नवम्बर**
- ➢ **अप्रैल = जुलाई**
- ➢ **सितम्बर = दिसम्बर**

❖ **अर्धवर्ष में:**

- ➢ **जनवरी = अप्रैल = जुलाई**
- ➢ **फरवरी = अगस्त**
- ➢ **मार्च = नवम्बर**
- ➢ **सितम्बर = दिसम्बर**

7. वर्ष का पहला और अंतिम दिन

❖ **साधारण वर्ष में पहला दिन = अंतिम दिन।**

- ➢ उदाहरण: 1 जनवरी 2007 = मंगलवार → 31 दिसम्बर 2007 = मंगलवार

❖ **लीप वर्ष में अंतिम दिन पहले दिन से 1 दिन आगे।**

- ➢ उदाहरण: 1 जनवरी 2004 = गुरुवार → 31 दिसम्बर 2004 = शुक्रवार

8. किसी निश्चित तिथि का दिन

- ➢ साधारण वर्ष के बाद अगला वर्ष साधारण हो → तिथि का दिन 1 दिन आगे बढ़ेगा।
- ➢ साधारण वर्ष के बाद अगला वर्ष लीप वर्ष हो → तिथि का दिन 1 या 2 दिन आगे बढ़ेगा।
- ➢ **फरवरी (साधारण वर्ष) में हर तारीख महीने में 4 बार आएगी।**
- ➢ **फरवरी (लीप वर्ष) में 29 तारीख वाली तारीख 1 बार आएगी और बाकी 4 बार।**

- 30 दिन वाले महीने में 1 और 2 तारीख 5 बार और बाकी 4 बार आएगी।
- 31 दिन वाले महीने में 1, 2, 3 तारीख 5 बार और बाकी 4 बार आएगी।
- किसी तारीख में 7, 14, 21, 28 दिन जोड़ने या घटाने से वही दिन प्राप्त होता है।

नोट्स:

- साधारण वर्ष में जून तक कैलेंडर 6 दिन बढ़ता है।
- लीप वर्ष में कैलेंडर 0 दिन बढ़ता है।

अनुपात और समानुपात (Ratio and Proportion)

अनुपात के प्रकार (Types of Ratio)

मुख्यत: अनुपात 6 प्रकार के होते हैं।

1. सरल अनुपात (Simple Ratio)

- यदि किसी अनुपात के दोनों पद **सह-अभाज्य (Co-prime)** हों, तो उसे सरल अनुपात कहते हैं।
- **उदाहरण:** 2 : 3

2. मिश्रित अनुपात (Compound Ratio)

- दो या दो से अधिक अनुपात के **पूर्व पदों के गुणनफल और अंतिम पदों के गुणनफल से** बने नए अनुपात को मिश्रित अनुपात कहते हैं।
- **उदाहरण:**
    - दो अनुपात (a : b) और (c : d) का मिश्रित अनुपात = (a × c) : (b × d)

- 2 : 3, 4 : 5 और 6 : 7 का मिश्रित अनुपात = 2 × 4 × 6 : 3 × 5 × 7 = 48 : 105 → सरलीकृत = 16 : 35

3. विलोमानुपात (Inverse Ratio / Reciprocal)

- किसी अनुपात के पदों को **उलट देने** पर जो नया अनुपात प्राप्त होता है, उसे विलोमानुपात कहते हैं।
- **उदाहरण:** 2 : 3 का विलोमानुपात = 3 : 2

4. वर्गानुपात (Duplicate Ratio)

- किसी अनुपात को **खुद के साथ मिश्रित करके** नया अनुपात बनाने पर प्राप्त अनुपात को वर्गानुपात कहते हैं।
- **उदाहरण:** 2 : 3 का वर्गानुपात = $2^2 : 3^2 = 4 : 9$

5. चतुर्थानुपात (Quartile Ratio)

- यदि चार अशून्य राशियां a, b, c और d समानुपात में हों, तो **d को a, b, c का चतुर्थानुपाती** कहते हैं।

समानुपात की परिभाषा (Definition of proportion)

चार राशियों में से जब पहली राशि और दूसरी राशि का अनुपात तीसरी और चौथी राशि के अनुपात के बराबर हों तो वह समानुपात कहलाता हैं।

उदाहरण - a: b :: c : d

यदि चार अशून्य संख्याएँ a, b, c तथा d इस प्रकार हैं, कि a : b = c : d, तो a, b, c तथा d समानुपात में हैं।

यदि a: b :: c : d हो, तो ad : bc इसमें a तथा d को बाह पद तथा b और c को मध्य पद कहते हैं।

समानुपात के प्रकार (Types of proportions)

1. निरंतर समानुपात (Constant proportion) : यदि तीन संख्याएँ a, b और c निरंतर समानुपात में हो, तो हम कह सकते हैं कि a, b और c समानुपात में हैं।

तो, $a/b = b/c$

$b^2 = ac$

$b = \sqrt{ac}$

अत: हम कह सकते हैं कि a पहला समानुपात c तीसरा समानुपात और b मध्य समानुपात हैं।

2. प्रत्यक्ष समानुपात (Direct proportion) : यदि X, Y के प्रत्यक्ष समानुपाती हो तो किसी एक के बढ़ने या घटने पर दूसरे पर उसका सीधा प्रभाव पड़ेगा।

यदि X बढ़ता हैं तो Y भी बढ़ेगा और यदि X घटता हैं तो Y भी घटेगा ।

3. व्युत्क्रम समानुपात (Inverse proportionality) : यदि X, Y के व्युत्क्रमानुपाती (Inversely proportional) हो यानी दोनों में किसी एक के बढ़ने या घटने पर दूसरे पर उसका व्युत्क्रम (Inverse) प्रभाव पड़ेगा ।

यदि X के बढ़ने पर Y घंटे और X के घटने पर Y बढ़े तो इस समानुपात को व्युत्क्रम समानुपात कहते हैं।

समय और कार्य (Time and work)

समय और कार्य के महत्वपूर्ण नियम (Important Rules of Time and Work)

- यदि किसी व्यक्ति द्वारा **एक कार्य पूरा करने में x दिन** लगते हैं, तो **1 दिन में किया गया कार्य = 1/x** भाग होगा।

- यदि किसी व्यक्ति द्वारा **1 दिन में 1/x भाग कार्य** किया जाता है, तो पूरा कार्य समाप्त करने में **x दिन** लगेंगे।

- यदि किसी कार्य को करने के लिए **व्यक्तियों की संख्या बढ़ाई जाए**, तो कार्य समाप्त होने में **समय उसी अनुपात में कम** होगा।

- यदि किसी व्यक्ति A की कार्य करने की क्षमता, किसी अन्य व्यक्ति B की क्षमता की **x गुनी** हो, तो कार्य पूरा करने में **A को B के समय का 1/x गुना समय** लगेगा।

- यदि A और B किसी कार्य को **भिन्न-भिन्न समय में** करते हैं, तो:

  - A का कार्य : B का कार्य = B द्वारा लिया समय : A द्वारा लिया समय

- यदि A किसी काम को **x दिन** में और B उसी काम को **y दिन** में करता है, तो काम पूरा होने में समय = **(x x y) / (x + y) दिन**

- यदि A और B किसी काम को x और y दिन में करते हैं, और A अकेला उसी काम को y दिन में कर सकता है, तो B अकेला वही कार्य पूरा करने में समय = **(x x y) / (x - y) दिन**

- यदि एक हौज को दो पाइप से भरा जा रहा है, जहाँ पहले पाइप द्वारा भरण में **h1 घंटे** और दूसरे पाइप द्वारा **h2 घंटे** लगते हैं, तो दोनों पाइप एक साथ खोलने पर हौज भरने में समय = **(h1 x h2) / (h1 + h2) घंटे**

वर्गमूल एवं घनमूल (Square Root and Cube Root)

1. वर्गमूल (Square Root)

- किसी संख्या का वर्गमूल वह संख्या होती है जिसे **दो बार गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है।**

- इसे √ चिन्ह से दर्शाया जाता है।

- **उदाहरण:**
    - $\sqrt{25} = 5$
    - **क्योंकि** $5 \times 5 = 25$

2. घनमूल (Cube Root)

- किसी संख्या का घनमूल वह संख्या होती है जिसे **तीन बार गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है।**
- इसे $\sqrt[3]{}$ चिन्ह से दर्शाया जाता है।
- **उदाहरण:**
    - $\sqrt[3]{64} = 4$
    - **क्योंकि** $4 \times 4 \times 4 = 64$

घातांक के नियम (Laws of Indices / Exponent Rules)

1. **गुणा करने का नियम (Multiplication Rule):**
    - $x^2 \times x^3 = x^{2+3} = x^5$
    - **उदाहरण:** $2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$
2. **भाग देने का नियम (Division Rule):**
    - $x^3 \div x^2 = x^{3-2} = x^1$
    - **उदाहरण:** $2^3 \div 2^2 = 2^1 = 2$
3. **ऋणांक (Negative Exponent Rule):**

- $x^{-3} = 1 / x^3$
- **उदाहरण:** $2^{-3} = 1 / 2^3 = 1/8$

4. **शून्य घातांक (Zero Exponent Rule):**
   - $x^0 = 1$, जहाँ $x \neq 0$
   - **उदाहरण:** $3^0 = 1$
5. **घातांक को घातांक पर उठाना (Power of a Power Rule):**
   - $(x^2)^3 = x^2x^3 = x^6$
   - **उदाहरण:** $(3^2)^3 = 3^6 = 729$

गणित शिक्षाशास्त्र (Math Pedagogy)

- रेखा गणित को व्यवस्थित रूप प्रदान किया। - **ब्रह्मगुप्त**
- प्राथमिक कक्षाओं में गिनती सिखाने के लिए उपयुक्त उपकरण - **अबेकस**
- स्कूली शिक्षा में गणित का मुख्य लक्ष्य - **बच्चों के विचार प्रक्रिया का गणितीय करण**
- Curriculum for 10 years school किसके द्वारा प्रकाशित - NCERT
- "गणित शिक्षण का वास्तविक उद्देश्य ज्ञान प्राप्त करना नहीं बल्कि शक्ति प्रदान करना है।" - **डटन**
- प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षा का महत्व - **व्यवहारिक**

- "बहुत सारी गणित जानने के बजाय यह जानना अधिक उपयोगी है कि गणितीय करण कैसे किया जाए।" - **डेबिट व्हीलर**
- गणितीय ज्ञान का प्रमुख रूप से उपयोग - **विज्ञान**
- "इकाई उपागम" - **मोरिसन**
- "जो छात्र गणित नहीं समझते हैं वह पाठशाला में प्रवेश नहीं पा सकते हैं।" - **प्लेटो**
- गणित शिक्षण विधि जिसके द्वारा कमजोर छात्रों को ज्यादा लाभ मिलता है - **संश्लेषण विधि**
- गणित शिक्षण की विधि जो तार्किक प्रतिपादन की विधि है - **संश्लेषण विधि**
- किस विधि द्वारा अर्जित ज्ञान स्थाई होता है - **विश्लेषण विधि**
- किस विधि द्वारा प्राप्त गणित शिक्षण छात्रों में आत्मविश्वास एवं आत्मनिर्भरता की भावना उत्पन्न करती है - **आगमन विधि**
- "शिक्षक शिक्षण उपकरणों के माध्यम से शिक्षण को स्थाई और रोचक बना देता है।" - **मेकन तथा राबईस**
- पाई कैसी संख्या है - **एक अपरिमेय संख्या**
- गणित की प्रकृति - **तार्किक**
- शून्य की खोज - **आर्यभट्ट**
- शून्य का प्रयोग सबसे पहले - **ब्रह्मगुप्त**
- त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों का योग - 180°
- पंचभुज के सभी अंत: कोणों का योग - 540°

- विभाजन ई का उपयोग - **रेखाखंड की लंबाई मापने हेतु**
- "गणित सभी विज्ञानों का द्वार और कुंजी है।" - **रोजर बेकन**
- सांख्यिकी में प्रसारण का विश्लेषण विधि - **R.A. फिशर**
- गणित की मानसिक सिद्धांत के जन्मदाता - **प्लेटो**
- गणित में हासिल करने की प्रक्रिया - **श्रीधर**
- सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या - 1
- पाई (π = 3.1416) का प्रतिपादन – **आर्यभट्ट प्रथम**
- सबसे छोटी अभाज्य संख्या - 2
- दो अभाज्य संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (HCF) - 1
- सबसे छोटी पूर्ण संख्या - 0
- किन्ही दो परिमेय संख्याओं के मध्य - **अनंत** परिमेय संख्याएं
- गणित विज्ञान है - **गणनाओं का विज्ञान**
- नियमों को उदाहरण में प्रयोग कर पोस्ट करना - **आगमन विधि**
- ज्यामिति का संबंध - **मापन क्षेत्र**
- ह्यूरिस्को का शाब्दिक अर्थ - **खोज करना**
- ह्यूरिस्टिक विधि की खोज - **आर्मस्ट्रांग ने**
- जीवन की गतिविधियों में गणित का सर्वाधिक प्रयोग - **आर्थिक गतिविधि**
- गणित शिक्षण की सहायक दृश्य सामग्री - **श्यामपट्ट, मॉडल, चार्ट आदि**

- गणित को रोचक, सुग्राही एवं सरल बनाने के लिए आवश्यक - **प्रभावशाली मनोविज्ञान**
- प्राथमिक स्तर पर गणित का महत्व - **मानसिक विकास**
- उपलब्धि परीक्षण और नैदानिक परीक्षण में अंतर - **उद्देश्य का**
- मनुष्य के जीवन की गतिविधियों में गणित का सर्वाधिक उपयोग - **सामाजिक और आर्थिक गतिविधियों में**
- सर्वाधिक प्रभावशाली शिक्षण सामग्री - **प्रत्यक्ष अनुभव**
- गणित के अध्ययन से बच्चे में विकसित गुण - **आत्मविश्वास, तार्किक सोच, विश्लेषक सोच**

गणित शिक्षणशास्त्र Maths Pedagogy

गणित की प्रकृति (Nature of Mathematics)

- गणित में **संख्याएँ (Numbers), स्थान (Space), दिशा (Magnitude) और मापन या माप-तौल (Measurement)** का ज्ञान प्राप्त किया जाता है।
- गणित **विज्ञान की क्रमबद्ध, संगठित तथा यथार्थ (Exact) शाखा** है।
- गणित विज्ञान का **अमूर्त रूप (Abstract form)** है।
- गणित **तार्किक विचारों का विज्ञान** है।
- गणित **आगमनात्मक (Inductive) तथा प्रायोगिक (Practical) विज्ञान** है।
- गणित के ज्ञान का आधार हमारी **ज्ञानेन्द्रियाँ (Sense Organs)** हैं।

- गणित के **नियम, सिद्धान्त, सूत्र** सभी स्थानों पर एक समान होते हैं, जिससे उनकी **सत्यता (Verification)** किसी भी समय और स्थान पर की जा सकती है।
- गणित का ज्ञान विभिन्न विज्ञान शाखाओं में उपयोगी है; जैसे- **भौतिकी (Physics), रसायन विज्ञान (Chemistry), जीव विज्ञान (Biology)** आदि।
- गणित के अध्ययन से **आगमन (Induction), निगमन (Deduction) और सामान्यीकरण (Generalization)** की योग्यता विकसित होती है।
- गणित के अध्ययन से बालकों में **आत्म-विश्वास (Confidence)** और **आत्म-निर्भरता (Self-Reliance)** का विकास होता है।

गणित की तर्क शक्ति (Logic Power of Mathematics)

गणित में तार्किकता की प्रक्रिया (Logical Process in Mathematics)

1. **अनुमान (Induction)**
2. **सामान्यीकरण (Generalization)**
3. **विशिष्ट स्थिति (Particularization / Specific Case)**
4. **परिकल्पना और प्रमाण (Hypothesis and Proof)**

गणित की भाषा (Language of Mathematics)

- गणित की भाषा **अंतर्राष्ट्रीय (International) एवं सार्वभौमिक (Universal)** है।
- यह **क्रमबद्ध (Sequential) और वैज्ञानिक (Scientific)** भाषा है।
- यह **संकेतात्मक (Symbolic) एवं चित्रात्मक (Pictorial)** है।

महत्वपूर्ण कथन (Important Statements)

- **गैलीलियो** - गणित एक ऐसी भाषा है जिससे परमात्मा ने सम्पूर्ण ब्रह्माण्ड की स्थापना की है।
- **नेपोलियन** - गणित के उन्नति में ही सबकी उन्नति है।
- **हब्स** - गणित एक पत्थर के समान विषय है; जिस प्रकार पत्थर औजारों को तीव्र करता है, वैसे ही गणित मस्तिष्क को तीव्र करता है।
- **प्लेटो** - गणित मानसिक शक्तियों को प्रशिक्षित करती है जिससे सोई हुई आत्मा चेतन और जागृत अवस्था में आती है।
- **डटन** - गणित तर्कसम्मत विचार है।
- **जॉन लॉक** - गणित वह मार्ग है जो बच्चों के मन-मस्तिष्क में तर्क की आदत पैदा करता है।
- **मार्शल स्टोन** - अमूर्त व्यवस्था को मूर्त रूप देना ही गणित है।
- **गौस** - गणित विज्ञान की रानी है।
- **रोजर बैकन** - गणित सभी विज्ञानों का द्वार और कुंजी है।
- **हॉगबेन** - गणित सभ्यता और संस्कृति का दर्पण है।

निदानात्मक और उपचारात्मक शिक्षण (Diagnostic & Remedial Teaching)

1. निदानात्मक शिक्षण (Diagnostic Teaching)

- निदान का अर्थ होता है **"कारण जानना"**, यानी इसमें बच्चों की असफलता, कमियाँ या कठिनाइयों का पता लगाया जाता है।

2. उपचारात्मक शिक्षण (Remedial Teaching)

- बच्चों की कमियों का पता लगाने के बाद उनका समाधान करना या फिर दोबारा से शिक्षण करवाना **उपचारात्मक शिक्षण** कहलाता है।

सामुदायिक गणित (Community Mathematics)

- ❖ समाज के प्रत्येक वर्ग के लोगों को गणित के ज्ञान की आवश्यकता होती है।
- ❖ समाज में प्रत्येक व्यक्ति, जो अपनी जीविका कमाता है और आय-व्यय करता है, उसे किसी न किसी रूप में गणित के ज्ञान की आवश्यकता होती है।
- ❖ सामाजिक जीवन जीने के लिए गणित का ज्ञान अत्यंत आवश्यक है।
- ❖ समाज में होने वाले सभी प्रकार के लेनदेन, व्यापार, वाणिज्य, उद्योग और सेवाएँ सभी गणित पर निर्भर होते हैं।
- ❖ समाज की उन्नति को समझने और प्रगति के रास्ते पर चलाने में **गणित की मुख्य भूमिका** होती है।

औपचारिक मूल्यांकन (Evaluation through Formal Methods)

- ❖ यह मूल्यांकन का वह तरीका है जिसमें अध्यापक या प्रेक्षणकर्ता द्वारा छात्रों की सीखने की प्रगति का समय-समय पर **लिखित या मौखिक रूप में मूल्यांकन** किया जाता है।
- ❖ इसमें विद्यार्थियों को पता होता है कि उनका मूल्यांकन किया जा रहा है।
- ❖ मुख्य उद्देश्य: छात्र की **शैक्षिक उपलब्धियों का ज्ञान** प्राप्त करना।

औपचारिक मूल्यांकन की प्रमुख विधियाँ

❖ **जाँच सूची / Check List**

➢ इसमें कुछ कथन दिये होते हैं, जिनके संबंध में बालक को **'हाँ' या 'नहीं'** में उत्तर देना होता है।

➢ प्रश्न और कथन बहुत स्पष्ट होते हैं।

❖ **प्रश्नावली (Questionnaire)**

➢ विद्यार्थियों को छपी हुई प्रश्नों की एक सूची दी जाती है, जिन पर वह अपने उत्तर लिखकर अध्यापक को वापस करते हैं।

❖ **प्रदत्त कार्य (Assignment)**

➢ छात्रों को किसी विशेष विषय पर **अध्यापक द्वारा कार्य** दिया जाता है।

➢ इसमें विषय से संबंधित महत्वपूर्ण पहलुओं को शामिल किया जाता है।

➢ इसे पूरा करने के लिए छात्रों को समय दिया जाता है और यह घर पर भी किया जा सकता है।

❖ **लिखित परीक्षाएँ (Written Examination)**

➢ इसमें **निबन्धात्मक (Essay type)** और **वस्तुनिष्ठ (Objective type)** प्रश्न शामिल होते हैं।

➢ वस्तुनिष्ठ परीक्षाएँ दो प्रकार की होती हैं:

- **प्रमापित (Standardised):** सामान्य स्तर (Norms) पहले से स्थापित।
- **अध्यापक निर्मित (Teacher-made):** प्रश्न शिक्षक स्वयं बनाते हैं।

❖ **मौखिक परीक्षाएँ (Oral Examination)**

➢ इसमें **मौखिक प्रश्न, वाद-विवाद, विचार-विमर्श और नाट्य-प्रदर्शन** शामिल होते हैं।

अनौपचारिक मूल्यांकन (Evaluation through Informal Methods)

❖ इसमें छात्रों का मूल्यांकन **अध्यापक या प्रेक्षणकर्ता द्वारा बिना उनकी जानकारी** के किया जाता है।

❖ इसका उद्देश्य **छात्रों का गुणात्मक मूल्यांकन** करना होता है।

अनौपचारिक मूल्यांकन की प्रमुख विधियाँ

❖ **अवलोकन या निरीक्षण (Observation)**

➢ छोटे बच्चों पर अपनाई जाती है।

➢ अध्यापक बच्चों की गतिविधियों का **अवलोकन** करता है।

➢ इसका उपयोग बालकों की योग्यता और व्यवहार संबंधी जानकारी प्राप्त करने के लिए किया जाता है।

❖ **संवाद (Interaction / Discussion)**

➢ बच्चों का आपस में किसी विषय पर **संवाद या वाद-विवाद** कराया जाता है।

➢ इससे बच्चों के आपसी व्यवहार और तर्क कौशल का पता चलता है।

❖ **अभिलेख (Record Keeping)**

➢ छात्रों से संबंधित **विशेष घटनाओं को अंकित** किया जाता है।

➢ इससे अध्यापक को उनके **संवेगात्मक और सामाजिक व्यवहार** के बारे में जानकारी मिलती है।

गणित में शिक्षण की समस्याएँ (Teaching Problems in Mathematics)

1. छात्रों का **शारीरिक व मानसिक स्वास्थ्य**।
2. प्राथमिक स्तर पर छात्रों का **गणित में कमजोर होना**।
3. गणित शिक्षण के लिए **उचित वातावरण का अभाव**।
4. **पाठ्यक्रम की संरचना** में समस्या।
5. **शिक्षक का व्यवहार**।
6. अध्यापक का **संबंधित विषय का सही ज्ञान ना होना**।
7. **उचित शिक्षण विधि का उपयोग** न होना।

त्रुटि विश्लेषण (Error Analysis)

- **परिभाषा:** छात्रों की अधिगम संबंधी कठिनाइयों या त्रुटियों का पता लगा कर उनके कारणों की खोज करना **त्रुटि विश्लेषण** कहलाता है।
- **महत्व:** गणित शिक्षा में त्रुटियों की महत्वपूर्ण भूमिका होती है, क्योंकि इन्हीं के द्वारा बच्चे सीखते हैं।
- **प्रकृति:** गणित में त्रुटियाँ **तथ्यात्मक (Factual)** और **प्रक्रियात्मक (Procedural)** हो सकती हैं।
- **उद्देश्य:** त्रुटियाँ बच्चों द्वारा प्राप्त अंकों के बारे में **प्रतिक्रिया (Feedback)** प्रदान करती हैं।

त्रुटियों के प्रकार

1. **लापरवाह त्रुटियाँ (Careless Errors)**
2. **कम्प्यूटेशनल त्रुटियाँ (Computational Errors)**
3. **व्यक्तिक त्रुटियाँ (Personal Errors)**
4. **अवधारणात्मक त्रुटियाँ (Conceptual Errors)**

सांख्यिकी (Statistics)

परिभाषा: संख्यात्मक आंकड़ों का व्यवस्थित अध्ययन **सांख्यिकी** कहलाता है।

आंकड़ों के प्रकार

1. प्राथमिक आंकड़े (Primary / Primary Data)

- जब कोई व्यक्ति खुद आंकड़े प्राप्त करता है।

प्राथमिक आंकड़े प्राप्त करने की विधियाँ:

1. Direct Personal Investigation (प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अन्वेषण)
2. Indirect Oral Investigation (अप्रत्यक्ष मौखिक अन्वेषण)
3. स्थानीय स्रोतों से सूचना प्राप्त करना
4. प्रश्नावली भरवाना
5. प्रगणकों द्वारा सूची भरवाना

2. द्वितीयक आंकड़े (Secondary / Secondary Data)

- ये आंकड़े **सरकार या अन्य संस्थाओं द्वारा पूर्व में प्रकाशित या अप्रकाशित** होते हैं।
- इनका उपयोग **भविष्य की योजनाओं के निर्माण में** किया जाता है।

द्वितीयक आंकड़े प्राप्त करने की विधियाँ:

1. अंतर्राष्ट्रीय प्रकाशन
2. सरकारी प्रकाशन
3. अर्द्धसरकारी संस्थाओं का प्रकाशन
4. व्यापारी संस्थाओं का प्रकाशन
5. पत्र-पत्रिकाओं का प्रकाशन

SACHIN ACADEMY